

1 Границя послідовності.

1.1 Послідовності.

Про послідовність була уже мова в розділі I.

Означення 1.1 *Послідовністю називається функція $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, тобто послідовність - це функція натурального аргумента.*

Якщо задана послідовність $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, то $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \rightarrow f(n)$, $f(n)$ позначають також через x_n .

Таким чином

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \rightarrow x_n \in X.$$

Послідовність надалі будемо позначати так: $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Множину значень послідовності будемо позначати $\{x_n\}$.

Наприклад. Нехай $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \rightarrow (-1)^n$. Її будемо позначати: $x_n = (-1)^n$ або $((-1)^n)$. Множина значень цієї послідовності $\{x_n\} = \{-1, 1\}$.

У випадку, коли множина $X = \mathbb{R}$, послідовність $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ називають числовою послідовністю.

Над числовими послідовностями можна виконувати арифметичні операції (як над функціями).

Означення 1.2

$$\alpha(x_n) \stackrel{def}{=} (\alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(x_n) \pm (y_n) \stackrel{def}{=} (x_n \pm y_n)$$

$$(x_n) \cdot (y_n) \stackrel{def}{=} (x_n \cdot y_n)$$

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} \stackrel{def}{=} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \quad (y_n \neq 0)$$

Надалі будемо розглядати числові послідовності.

1.2 Границя послідовності.

Нехай (x_n) - числова послідовність.

Означення 1.3 *Число a називається границею послідовності (x_n) , якщо,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n - a| < \varepsilon]$$

Те, що a є границею послідовності (x_n) позначається так: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Враховуючи, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, дамо геометричне означення границі послідовності.

Означення 1.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{def}{=} |\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [x_n \in U_\varepsilon(a)]|,$$

де $U_\varepsilon(a) = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ - *окіл точки a .*

Часто означення границі записують і в такому вигляді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{\text{def}}{=} |\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon]|$$

Означення 1.5 *Послідовність (x_n) називається збіжною, якщо $\exists a \in \mathbb{R} \quad [\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a]$, тобто (x_n) - збіжна послідовність $\stackrel{\text{def}}{=} |\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n - a| < \varepsilon]|$. Якщо послідовність не є збіжною, то її називають розбіжною.*

Приклад. Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$. Для цього потрібно для $\forall \varepsilon > 0$ знайти $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, щоб для $\forall n > n_0$ виконувалась нерівність $|\frac{2n}{2n+1} - 1| < \varepsilon$. Розглянемо різницю

$$|\frac{2n}{2n+1} - 1| = \frac{1}{2n+1}$$

Далі n_0 будемо шукати з нерівності $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$, яка еквівалентна $\frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - 1) < n$. Візьмемо $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - 1) \right\rceil$.

Переконайтесь, що таке n_0 задовольняє означення границі.

Вправи. Довести за означенням, що:

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+2} = 2$,
- б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2+2} = 0$.

1.3 Основні властивості збіжних послідовностей

Введемо деякі поняття для числових послідовностей.

Означення 1.6 *Послідовність (x_n) називається сталою (постійною), якщо*

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n = a]$$

Означення 1.7 *Послідовність (x_n) називається фінально сталою, якщо*

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [x_n = a]$$

Означення 1.8 *Послідовність (x_n) називається*

обмеженою зверху, якщо $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n \leq M]$

обмеженою знизу, якщо $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [m \leq x_n]$

обмеженою, якщо $\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [m \leq x_n \leq M]$

Вправа. Довести, що (x_n) - обмежена $\Leftrightarrow \exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [|x_n| \leq K]$

Теорема 1 1. *Якщо послідовність (x_n) фінально стала, то (x_n) - збіжна.*

2. *Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\forall \varepsilon > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ - скінченна*

3. *Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то $a = b$.*

4. *Якщо послідовність (x_n) - збіжна, то (x_n) обмежена.*

Доведення

1. Для доведення збіжності фінально сталої послідовності досить в означенні границі взяти a і n_0 з означення фінально сталої послідовності.

2. З означення границі послідовності маємо, що всі x_n для яких $n > n_0$ задовільняють нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, тобто ті які не задовільняють цю нерівність можуть мати номери $n \leq n_0$. Таких є скінченне число.

3. Припустимо, що $a \neq b$. Тоді $|a - b| = \alpha > 0$. Візьмемо $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. З умови теореми маємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \equiv \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_1 \quad [|x_n - a| < \varepsilon]$$

і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \equiv \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad [|x_n - b| < \varepsilon]$$

Тоді для $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ будемо мати

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

. Отримали, що $|a - b| < \alpha$. Це суперечить умові, що $|a - b| = \alpha$.

4. З збіжності послідовності (x_n) маємо, що $\exists a \in \mathbb{R}, \varepsilon = 1 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n - a| < 1]$, тобто

$$\forall n > n_0 \quad [a - 1 < x_n < a + 1]$$

Візьмемо

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a + 1\}$$

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1\}$$

Тоді $\forall n \in \mathbb{N} \quad [m \leq x_n \leq M]$. Значить послідовність (x_n) обмежена.

Зауваження 1.1 Ми довели, що з збіжності послідовності випливає її обмеженість. Обернене твердження не вірне.

Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n$ обмежена послідовність

$$\exists M = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [|x_n| \leq 1]$$

але вона не є збіжною.

1.4 Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності та їх властивості.

Означення 1.9 Послідовність (x_n) називається нескінченно малою (н.м.п.), якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n| < \varepsilon]$$

Означення 1.10 Послідовність (x_n) називається нескінченно великою (н.в.п.), якщо

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n| > E]$$

Те, що послідовність (x_n) є нескінченно великою, позначають так $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Отже

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \stackrel{\text{def}}{=} \forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n| > E]$$

Введемо для послідовностей ще такі означення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \stackrel{\text{def}}{=} |\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [x_n > E]|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \stackrel{\text{def}}{=} |\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [x_n < -E]|$$

Вправа. Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

Теорема 2 а) Якщо (x_n) - нескінченно мала послідовність і $\forall n \quad [x_n \neq 0]$, то $(\frac{1}{x_n})$ - нескінченно велика послідовність.

б) Якщо (x_n) - нескінченно велика послідовність і $\forall n \quad [x_n \neq 0]$, то $(\frac{1}{x_n})$ - нескінченно мала послідовність.

Доведення.

Покажемо, що $(\frac{1}{x_n})$ - н.в.п. Візьмемо $\forall E > 0$ і $\varepsilon = \frac{1}{E}$, тоді з того, що (x_n) - н.м.п. будемо мати:

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{E} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n| < \varepsilon = \frac{1}{E}]$$

Тому

$$\forall n > n_0 \quad \frac{1}{|x_n|} = \left| \frac{1}{x_n} \right| > E$$

Це означає, що $(\frac{1}{x_n})$ - н.в.п.

б) Доведення аналогічне
Довести самостійно.

Зауваження 1.2 Поняття " (x_n) - н.в.п." і " (x_n) - необмежена послідовність" не є еквівалентними. Наприклад, $x_n = [1 + (-1)^n]n$ - необмежена послідовність, однак не є нескінченно великою. Довести це!

Теорема 3 (арифметичні властивості н.м.п.) а) Якщо (α_n) - н.м.п. і (β_n) - н.м.п., то $(\alpha_n \pm \beta_n)$ - н.м.п.

б) Якщо (α_n) - н.м.п. і (β_n) обмежена послідовність, то $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ - н.м.п.

в) Якщо (α_n) - н.м.п. і (β_n) - н.м.п., то $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ - н.м.п.

Доведення.

а) Візьмемо $\forall \varepsilon > 0$ і позначимо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з того, що (α_n) і (β_n) н.м.п. послідовності

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_1 \quad [|\alpha_n| < \varepsilon_1]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad [|\beta_n| < \varepsilon_1]$$

Для $\forall n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ $|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$

Отримали, що $(\alpha_n \pm \beta_n)$ - н.м.п.

б) З обмеженості послідовності (β_n) маємо, що

$$\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [|\beta_n| \leq K].$$

Для $\forall \varepsilon > 0$ позначимо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K}$. Тоді з умови

$$(\alpha_n) - \text{н.м.п.} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}].$$

Звідси для $\forall n > n_0 \quad [|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon]$

Отримали, що $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ - н.м.п.

в) Зауважимо, що н.м.п. (β_n) є збіжною і, значить, обмеженою. Тому за доведеним в п. б) - $(\alpha_n \beta_n)$ - н.м.п.

Вправи.

1. Побудувати приклади н.м. послідовностей (α_n) і (β_n) , для яких

а) $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ - н.м.п.,

б) $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ - н.в.п.,

в) $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ - збіжна послідовність,

г) $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ - розбіжна послідовність.

2. Нехай (x_n) і (y_n) н.в.п. Дослідити для яких послідовностей можна стверджувати, що вони будуть н.в.п. $(x_n \pm y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$.

1.5 Арифметичні властивості збіжних послідовностей.

Раніше було введено арифметичні операції над послідовностями. Тут дослідимо властивості послідовностей отриманих внаслідок цих операцій.

Лема 1.1 Для того, щоб границя послідовності (x_n) дорівнювала a необхідно і достатньо, щоб послідовність $(x_n - a)$ була н.м.п. Тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (x_n - a) - \text{н.м.п.}$$

Доведення.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \equiv \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n - a| < \varepsilon] \equiv (\alpha_n) \equiv (x_n - a) - \text{н.м.п.}$$

Теорема 4 Нехай послідовності (x_n) і (y_n) - збіжні і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тоді послідовності (cx_n) , $(x_n \pm y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ при $(b \neq 0)$ збіжні і

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ca$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Доведення. В доведеннях будемо користуватися доведеною лемою та властивостями нескінченно малих послідовностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow (x_n - a) = (\alpha_n)$ - н.м.п. $\Rightarrow (c \cdot \alpha_n) = (cx_n - ca)$ - н.м.п. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = ca$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow (x_n - a) = (\alpha_n)$ - н.м.п. $\wedge (y_n - b) = (\beta_n)$ - н.м.п. $\Rightarrow (\alpha_n \pm \beta_n) = (a \pm b - x_n \mp y_n)$ - н.м.п. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm y_n = a \pm b$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow (x_n - a) = (\alpha_n)$ - н.м.п. $\wedge (y_n - b) = (\beta_n)$ - н.м.п.

Добуток $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n = ab + \gamma_n$

Тому $x_n y_n - ab = \gamma_n$, (γ_n) - н.м.п.

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$

4. Аналогічно як раніше запишемо $x_n - a = \alpha_n$, $y_n - b = \beta_n$, де (α_n) і (β_n) - н.м.п.

Тоді $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{(b + \beta_n)b} (b\alpha_n + a\beta_n) = \frac{1}{y_n \cdot b} \cdot \gamma_n$

Послідовність (γ_n) - н.м. Покажемо, що послідовність $(\frac{1}{y_n \cdot b})$ - обмежена. З умови теореми маємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$. Нехай $b > 0$. Візьмемо $\varepsilon = \frac{b}{2} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \varepsilon = \frac{b}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \left[|y_n - b| < \varepsilon = \frac{b}{2} \right]$$

тобто

$$\forall n > n_0 \quad \left[\frac{b}{2} < y_n < b + \varepsilon \right]$$

Звідси

$$\forall n > n_0 \quad \left[\frac{1}{y_n} > \frac{2}{b} \right] \Rightarrow \forall n > n_0 \quad \left[0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{2}{b^2} \right]$$

Значить, послідовність $(\frac{1}{y_n b})$ - обмежена.

Тому послідовність $(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}) = (\frac{1}{y_n b} \gamma_n)$ - н.м.п. і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Зауваження 1.3 В формулюванні теореми істотним є те, що послідовності (x_n) і (y_n) збіжні.

Наприклад, для послідовностей $x_n = (-1)^n$ $y_n = (-1)^{n+1}$ не має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Перевірити!

Доведені властивості використовуються при знаходженні границь послідовностей.

Приклад. Знайти границю послідовності.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 5n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2}} = \\ \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2})} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} = \\ &= \frac{2 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 2 \end{aligned}$$

1.6 Властивості границі послідовності зв'язані з нерівностями.

Теорема 5 1. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) - збіжні, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ і $a < b$.

Тоді

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [x_n < y_n]$$

2. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) - збіжні, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ і $\forall n \in \mathbb{N} [x_n \leq z_n \leq y_n]$. Тоді послідовність (z_n) збіжна і $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

Доведення .

1. Нехай $b - a = \alpha$ і $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_1 \quad [a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad [b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon]$$

тому для $\forall n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$[x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < y_n]$$

Отже $\exists n_0 = \max\{n_1, n_2\} \quad \forall n > n_0 \quad [x_n < y_n]$

2. З умови теореми маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_1 \quad [a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad [a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon]$$

Тому для $\forall n > n_0 = \max\{n_1, n_2\} \quad [a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon]$

Отже

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad [a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon]$$

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

Наслідок 1.1 Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тоді

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n < y_n] \Rightarrow a \leq b$$

$$2. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n \leq y_n] \Rightarrow a \leq b$$

$$3. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n < b] \Rightarrow a \leq b$$

$$4. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n \leq b] \Rightarrow a \leq b$$

Доведення. Доведемо імплікацію 1. Припустимо супротивне. Нехай $a > b$. Тоді за доведеною теремою

$$\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad [x_n > y_n]$$

що суперечить припущенню.

Решта імплікацій доводиться аналогічно.

Зауваження 1.4 Те, що в 1 з строгої нерівності $\forall n \in \mathbb{N} [x_n < y_n]$ не впливає строга нерівність, показує приклад:

$$\text{Нехай } x_n = \frac{1}{n+1}, \quad y_n = \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[x_n = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = y_n \right]$$

Однак $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

2 Питання існування границі послідовності.

2.1 Монотонні послідовності. Теорема Вейєрштрасса про існування границі монотонної послідовності.

Означення 2.1 *Послідовність (x_n) називається*

1. *монотонно зростаючою, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n < x_{n+1}]$*
2. *монотонно неспадною, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n \leq x_{n+1}]$*
3. *монотонно спадною, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n > x_{n+1}]$*
4. *монотонно незростаючою, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n \geq x_{n+1}]$*

Якщо для послідовності виконується одна з умов 1,2,3,4 то її називають монотонною

Приклади

1. Послідовність $(\frac{1}{n})$ монотонно спадає.
2. Послідовність (2^n) монотонно зростає.

Теорема 6 (Вейєрштрасса) *[(про границю монотонної послідовності)]*

1. *Якщо послідовність (x_n) монотонно неспадна і обмежена зверху, то вона є збіжна.*
2. *Якщо послідовність (x_n) монотонно не зростає і обмежена знизу, то вона є збіжна.*

Доведення. Доведемо твердження 1. Розглянемо множину значень послідовності $\{x_n\}$. Ця множина обмежена зверху. Тому $\exists \sup\{x_n\} = a$. Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. З означення точної верхньої межі маємо

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n \leq a]) \wedge \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_{n_0} \in \{x_n\} \quad [a - \varepsilon < x_{n_0}]$$

Тоді

$$\forall n > n_0 \quad [x_n \leq a < a + \varepsilon] \wedge [a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n]$$

Отже

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon]$$

Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Доведення другої частини теореми проводиться аналогічно.

Вправа.

1. Довести

$$\forall (x_n) \text{ монотонна } [(x_n) \text{ збіжна} \Leftrightarrow (x_n) \text{ - обмежена}]$$

2. Показати, що теорема Вейєрштрасса вірна при умові, що послідовність монотонна з деякого $n_0 \in \mathbb{N}$.

Розглянемо приклади застосування теореми Вейєрштраса при знаходженні границі послідовності.

Приклад Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0$ якщо $q > 1$.

Дійсно, якщо $x_n = \frac{n}{q^n}$, то $x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n+1}{nq} \cdot \frac{n}{q^n} = x_n(1 + \frac{1}{n})/q$.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})/q = \frac{1}{q} < 1$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad (1 + \frac{1}{n})/q < 1$. Тому, починаючи з $n > n_0$ послідовність (x_n) буде монотонно спадною. Оскільки вона обмежена знизу нулем, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Використаємо співвідношення $x_{n+1} = \frac{1}{q}(1 + \frac{1}{n})x_n$ і теорему про границю добутку послідовності.

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q}(1 + \frac{1}{n})x_n = \frac{1}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{q} c$$

З рівності $c = \frac{1}{q} c$ при $q > 1$ маємо, що $c = 0$.

Приклад. Надалі часто будемо використовувати те, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Покажемо, що це випливає з результату попереднього прикладу.

Візьмемо $\forall \varepsilon > 0$, позначимо $q = 1 + \varepsilon$. З того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0$ маємо

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [\frac{n}{q^n} < 1]$$

Тому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [1 < n < (1 + \varepsilon)^n] \equiv [1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon]$

Значить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Вправа. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$, де $a \in \mathbb{R}$.

2.2 Число e .

Використаємо теорему Вейєрштраса для введення поняття числа e .

Розглянемо послідовність (x_n) , де $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Далі покажемо, що

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n < x_{n+1}]$$

$$2. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [x_n < 3]$$

отже послідовність (x_n) - монотонно зростаюча і обмежена зверху. Тому вона має границю і наступне означення буде коректне.

Означення 2.2 $e \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Залишилось довести сформульовані властивості 1 і 2.

Використовуючи формулу бінома Ньютона, отримаємо, що

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} (\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (\frac{1}{n})^3 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-(n-1))}{n!} (\frac{1}{n})^n = \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}) \end{aligned}$$

Аналогічно розпишемо $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} =$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{n}{n+1})$$

Легко зауважити, що кожен член першої суми не більший членів другої суми і членів у другій сумі на одиницю більше. Тому $x_n < x_{n+1}$.

Далі у виразі для x_n всі дужки $(1 - \frac{k}{n})$ замінимо одиничками.

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}) < \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= 2 + \frac{1/2 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Отже монотонність і обмеженість послідовності (x_n) доведено.

Враховуючи, що $\forall n [2 < x_n < 3]$ маємо нерівність $2 < e \leq 3$. Наближено число $e \approx 2,718281828$.

2.3 Деякі властивості числа e .

Розглянемо спочатку ще одну послідовність, границею якої є число e .

Нехай $k < n$. Тоді, відкинувши в сумі, що виражає x_n останні доданки будемо мати, що

$$x_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})$$

При фіксованому $k < n$ перейдемо до границі $n \rightarrow \infty$ в попередній нерівності і будемо мати

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = y_k$$

Отримали, що для $\forall k y_k \leq e$. Однак при розгляді послідовності x_n було показано, що $\forall n x_n < y_n$. Отже $\forall n \in \mathbb{N} x_n < y_n \leq e$. Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$$

Оцінимо різницю $(e - y_n)$. Для цього розглянемо різницю

$$\begin{aligned} y_{n+m} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3) \dots (n+m)} \right] \end{aligned}$$

Якщо в знаменниках всі множники $n+k$ ($k \geq 3$) замінити на $n+2$, то отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} y_{n+m} - y_n &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^m}}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Легко перевірити, що $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$. Отже.

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} y_{n+m} - y_n < \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n!} \frac{1}{n}$$

Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$. Будемо мати нерівність

$$e - y_n < \frac{1}{n!n}$$

Тому

$$e = y_n + \frac{\theta}{n!n}, \text{ де } \theta \in]0, 1[.$$

Формула

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}$$

може бути використана для наближеного обчислення числа e з наперед заданою точністю.

Теорема 7 Число e - ірраціональне.

Доведення. Покажемо, що число e не може бути раціональним числом.

Нехай e раціональне число і $e = \frac{m}{n}$. Тоді

$$e = \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}$$

Домножимо обидві частини цієї рівності на $n!$

$$\frac{m}{n}n! = n!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}) + \frac{\theta}{n}$$

В лівій частині маємо ціле число, справа добуток $n!$ на кожен доданок є ціле число, а $\frac{\theta}{n}$ - дробове число. Отримали протиріччя. Отже $e \neq \frac{m}{n}$.

2.4 Підпоследовності. Часткові границі.

Означення 2.3 Нехай (x_n) - послідовність і (n_k) монотонно зростаюча послідовність натуральних чисел

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad [n_k < n_{k+1}]$$

Послідовність $(x_{n_k}) = (y_k)$ називається підпоследовністю послідовності (x_n) .

Приклад. Послідовність $(x_n) = \frac{1}{2n}$ є підпоследовністю послідовності $(x_n) = (\frac{1}{n})$.

Зауважимо, що сама послідовність є своєю підпоследовністю.

Між збіжністю послідовності (x_n) і збіжністю її підпоследовностей є наступний зв'язок.

Теорема 8 Для того, щоб послідовність (x_n) була збіжна необхідно і достатньо щоб всі її підпоследовності були збіжними до одного і того ж числа.

Доведення.

Доведемо необхідність умови. Нехай (x_n) - збіжна послідовність і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n - a| < \varepsilon]$$

Для довільної підпоследовності (x_{n_k}) послідовність натуральних чисел (n_k) є монотонно зростаючою. Тому $\exists k_0 \quad n_{k_0} > n_0$, а звідси отже для $\forall k > k_0 \quad [n_k > n_0]$ і

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_0 \quad [|x_{n_k} - a| < \varepsilon]$$

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Достатність умови отримуємо з того, що сама послідовність є однією з своїх підпоследовностей.

Зауваження 2.1 Послідовність може мати кілька збіжних підпослідовностей, однак сама може бути не збіжною. Наприклад $(x_n) = ((-1)^n)$.

Означення 2.4 Число a називається частковою границею послідовності (x_n) , якщо $\exists (x_{n_k})$ - підпослідовність для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Приклад. Послідовність $((-1)^n)$ має дві часткові границі -1 і 1 .

Вправа. Знайти всі часткові границі послідовності

- а) $(\sin \frac{\pi n}{2})$,
- б) $\frac{((-1)^n + 1)n^2}{n^2 + 1}$
- в) $\frac{(-1)^n n}{n + 2}$

Теорема 9 (Больцано - Вейерштрасса) Кожна обмежена послідовність (x_n) має збіжну підпослідовність, тобто

$$\forall (x_n) [(x_n) - \text{обмежена} \Rightarrow \exists (x_{n_k}) - \text{збіжна підпослідовність.}]$$

Доведення. Якщо послідовність (x_n) обмежена, то

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [a \leq x_n \leq b]$$

Це означає, що множина $\{x_n\}$ - обмежена.

Множина $\{x_n\}$ може бути скінченною або нескінченною. Якщо $\{x_n\}$ - множина значень послідовності скінченна, то принаймні одне із значень приймається послідовністю нескінченне число раз. Тобто існує значення a і послідовність $\{n_k\}$, $n_k \in \mathbb{N}$, така, що

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

$$a = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots$$

Тоді (x_{n_k}) є збіжною підпослідовністю.

Якщо множина $\{x_n\}$ нескінченна, то з леми про граничні точки випливає існування хоча б одної граничної точки цієї множини. Нехай a є гранична точка множини $\{x_n\}$. Тоді в кожному околі $U(a)$ є нескінченна кількість точок з множини $\{x_n\}$. Проведемо вибір точок з $\{x_n\}$ так:

З $U_1(a)$ виберемо довільну точку x_{n_1}

З $U_{1/2}(a)$ виберемо довільну точку x_{n_2} так, щоб $n_1 < n_2$.

З $U_{1/3}(a)$ виберемо довільну точку x_{n_3} так, що $n_2 < n_3$.

.....

З $U_{1/k}(a)$ виберемо точку x_{n_k} так, що $n_{k-1} < n_k$.

.....

Тоді вибрана послідовність $y_k = (x_{n_k})$ буде підпослідовністю (x_n) і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Теорема 10 Якщо послідовність (x_n) не обмежена, то $\exists (x_{n_k})$ - підпослідовність, для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \infty$.

Доведення. Легко показати, що для необмеженої послідовності множина $\{x_n \mid |x_n| > M\}$ для довільного M є нескінченною. Якби вона була б скінченною, тоді можна б було вибрати найбільший і найменший елемент і послідовність була б обмеженою.

Користуючись вказаною властивістю послідовності, для кожного k виберемо x_{n_k} так, щоб

$$|x_{n_k}| > k \text{ і } n_k > n_{k-1} \text{ для } k = 2, 3, 4, \dots$$

Вибрана підпослідовність (x_{n_k}) буде нескінченно великою послідовністю, тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \infty$.

З двох попередніх теорем можна отримати наступне твердження.

Наслідок 2.1 З кожної послідовності (x_n) можна вибрати збіжну або нескінченно велику підпослідовність.

2.5 Фундаментальні послідовності. Критерій Коші існування границі послідовності.

Означення 2.5 Послідовність (x_n) називається фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall m > n_0 [|x_n - x_m| < \varepsilon]$ або

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} [n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon]$$

Приклад. Перевірити чи послідовність $(\frac{1}{n})$ є фундаментальною. Розглянемо для $\forall n, m$ ($n < m$) різницю

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

З останньої нерівності отримуємо, що $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ задовільняє означення фундаментальності. Тому послідовність $(\frac{1}{n})$ - фундаментальна.

Теорема 11 Для довільної послідовності мають місце наступні твердження.

1. (x_n) - збіжна $\mid \Rightarrow \mid x_n$ - фундаментальна.
2. (x_n) - фундаментальна $\mid \Rightarrow \mid (x_n)$ - обмежена.
3. (x_n) фундаментальна $\wedge (x_{n_k})$ - збіжна $\mid \Rightarrow \mid (x_n)$ - збіжна.

Доведення.

1. Нехай (x_n) - збіжна послідовність.

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді

$$(x_n) \text{ - збіжна } \mid \Rightarrow \mid \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [|x_n - a| < \varepsilon_1]$$

Тому

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \wedge \forall m > n_0 \quad [|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon]$$

Отже

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \forall m > n_0 \quad [|x_n - x_m| < \varepsilon]$$

Послідовність (x_n) - фундаментальна.

2. Нехай (x_n) - фундаментальна послідовність. Тоді для $\varepsilon = 1 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \wedge \quad m > n_0 \quad [|x_n - x_m| < \varepsilon = 1]$.

Нехай $m = n_0 + 1 > n_0$. Тоді

$$\forall n > n_0 \quad [x_{n_0+1} - 1 < x_n < x_{n_0+1} + 1]$$

Візьмемо

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1} - 1\}$$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1} + 1\}$$

Отримали, що

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [m \leq x_n \leq M]$$

Послідовність (x_n) - обмежена.

3. Нехай послідовність (x_n) фундаментальна, її підпослідовність (x_{n_k}) - збіжна і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Візьмемо $\forall \varepsilon > 0$. Тоді

$$(x_n) - \text{фундаментальна} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \forall m > n_0 \quad [|x_n - x_m| < \varepsilon_1]$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_0 \quad [|x_{n_k} - a| < \varepsilon_1]$$

Виберемо з послідовності (n_k) таке n_k , щоб було $k > k_0$ і $n_k > n_0$. Тоді

$$\forall n > n_0 \quad [|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon].$$

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Теорема 12 (Критерій Коші існування границі послідовності.) Для збіжності послідовності (x_n) необхідно і достатньо, щоб (x_n) була фундаментальною, тобто

$$\forall (x_n) \quad [(x_n) - \text{збіжна} \Leftrightarrow (x_n) - \text{фундаментальна}]$$

Доведення. Будемо користуватись твердженнями, які доведені в попередній теоремі.

Необхідність. Якщо послідовність збіжна, то вона фундаментальна. Це уже доведено.

Достатність. Нехай послідовність фундаментальна. Тоді послідовність обмежена, а значить з неї можна вибрати збіжну підпослідовність. Фундаментальна послідовність, яка містить збіжну підпослідовність, є збіжною послідовністю. Теорема доведена.

2.6 Верхня і нижня границі послідовності.

Нехай (x_n) обмежена послідовність. Позначимо через E множину її часткових границь. Очевидно, що E також обмежена множина. Дійсно. Якщо

$$\exists M, m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [m \leq x_n \leq M]$$

то точки поза відрізком $[m, M]$ не можуть бути частковими границями послідовності (x_n) , бо в достатньо малому околі цих точок немає x_n з послідовності.

Отже множина $E \subset [m, M]$ є обмеженою.

Теорема 13 Множина часткових границь обмеженої послідовності має максимальний і мінімальний елемент.

Доведення. Якщо послідовність обмежена, то її множина часткових границь E обмежена. Тому $\exists \inf E = a$ і $\exists \sup E = b$. Покажемо що a і b є частковими границями. Тоді $a = \min E$ і $b = \max E$.

Запишемо послідовність міркувань, які доводять що b часткова границя.

$$1. \sup E = b \Rightarrow \forall U(b) \quad \exists c \in E \quad [c \in U(b)]$$

$$2. \forall U(b) \quad \forall c \in U(b) \quad \exists U(c) \subset U(b)$$

$$3. c \in E \Rightarrow \forall U(c) \quad [U(c) - \text{містить нескінченну кількість } x_n] \Rightarrow \forall U(b) \quad [U(b) - \text{містить нескінченну кількість } x_n] \Rightarrow \exists (x_{n_k}) \quad [\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b] \Rightarrow b \in E.$$

Вибір підпослідовності (x_{n_k}) можна зробити за схемою, яка є в доведенні теореми Больцано-Вейерштрасса.

Доведення, того що a є часткова границя послідовності проводиться аналогічно.

Якщо послідовність (x_n) необмежена зверху, то $\exists (x_{n_k})$ підпослідовність для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$

Якщо послідовність (x_n) необмежена знизу, то $\exists (x_{n_k})$ підпослідовність для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = -\infty$

(Доведення провести самостійно).

Означення 2.6 ((A) верхньої і нижньої границі послідовності) Якщо послідовність (x_n) обмежена, то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \min E$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \max E$$

Якщо послідовність необмежена знизу, то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$$

Якщо послідовність необмежена зверху, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ - будемо називати нижньою і верхньою границями послідовності (x_n) і будемо позначати також $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$.

З теореми, яка доведена раніше, випливає коректність даного означення.

Приклади.

$$a) \liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1, \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$$

Поряд з наданим означенням A дамо інше означення нижньої та верхньої границі послідовності.

Означення 2.7 (B) Нехай (x_n) - обмежена послідовність. Тоді

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{\text{def}}{=} |(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 [x - \varepsilon < x_n]) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 [x_n < a + \varepsilon])|$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = b \stackrel{\text{def}}{=} |(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 [x_n < b + \varepsilon]) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 [b - \varepsilon < x_n])|$$

Означення 2.8 (С) Нехай (x_n) - обмежена послідовність, тоді

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$$

Зауважимо, що границі справа в означенні C існують, бо послідовності (a_n) і (b_n) , де

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{k \geq n} x_k \text{ і } b_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{k \geq n} x_n$$

монотонні $((a_n) - \text{зростаюча}, (b_n) - \text{спадна})$ і обмежені.

Теорема 14 Означення A, B, C верхніх і нижніх границь послідовності є еквівалентними.

Доведемо еквівалентність означень A і B . Цими означеннями будемо користуватися найчастіше.

При доведенні теореми будемо користуватися наступним твердженням.

c — часткова границя послідовності $(x_n) \Leftrightarrow \forall U(c) \quad \{n \in \mathbb{N} | x_n \in U(c)\} — \text{нескінченна.}$

тобто в довільному околі точки c є нескінченна кількість членів послідовності. Це твердження безпосередньо впливає із означення часткової границі.

Нехай b - верхня границя послідовності в розумінні означення A , тобто b - найбільша часткова границя. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ справа від $b + \varepsilon$ немає часткових границь послідовності. Тому там є тільки скінченна кількість членів послідовності. Візьмемо $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N} | b + \varepsilon \leq x_n\}$.

Будемо мати, що $\forall n > n_0 \quad x_n < b + \varepsilon$.

Перша умова в означенні B доведена.

Враховуючи, що b - це часткова границя, в околі $U(b)$ є нескінченна кількість членів послідовності. Тому там знайдуться номери n , більші довільного n_0 . Тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n > n_0 \quad [b - \varepsilon < x_n]$$

Довели: якщо b верхня границя послідовності в розумінні означення A , тоді b верхня границя послідовності в розумінні означення B .

Доведемо, що має місце навпаки.

Нехай b - верхня границя послідовності в розумінні означення B . Умова

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad [x_n < b + \varepsilon]$$

говорить, що немає часткових границь послідовності більших за b . Залишилось показати, що b є частковою границею.

Візьмемо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$, що всі x_n з $n > n_0$ задовільняють умові $x_n < b + \varepsilon$. Будемо розглядати x_n для $n > n_0$. З другої умови означення B маємо, що існує нескінченна кількість таких x_n , що $b - \varepsilon < x_n$. Всі вони звичайно належать околу $U_\varepsilon(b)$. Тому b часткова границя послідовності.

Для нижньої границі еквівалентність означень A і B доводиться аналогічно.

Вправи.

1. Знайти множину всіх часткових границь послідовності, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$
 - а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$
 - б) $x_n = \tan n$.
 - в) $x_n = \sin n$.
 - г) $x_n =$ сумі дільників n .
 - д) $x_n = n^{(-1)^n}$.
 - е) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$
2. Побудувати послідовність x_n (якщо це можна), множина часткових границь якої є:
 - а) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - б) $E = \{1/n\}$
 - в) $E = [0, 1]$
 - г) $E =]0, 1[$
 - д) $E = \mathbb{Q}$
 - е) $E = \mathbb{R}$
3. Дати приклад послідовностей x_n і y_n , які мають рівно по одній частковій границі в $\mathbb{R}$ і послідовність $(x_n + y_n)$
 - а) не має часткових границь.
 - б) має рівно одну часткову границю.
 - в) має рівно дві часткові границі.
 - г) має більше двох часткових границь.